

# Rugalmas állandók mérése

Mérési jegyzőkönyv

Szőke Kálmán Benjamin

2010. szeptember 21.

Javítva: 2010. október 16.

## Mérés leírása:

A mérés célja különböző alakú és anyagú rudak Young-modulusának, és egy torziós szál torziómodulusának a meghatározása. A Young-moduluszt egy kétkarú emelővel mérjük. A rudak behajlását különböző súlyokkal terhelve mérjük  $\pm 0.01$  mm pontossággal. Állandó hosszúságú alátámasztás mellett vizsgáljuk a behajlását a terhelés függvényében, majd pedig állandó terhelés mellett a behajlást mérjük a hosszúság függvényében. A torziómoduluszt a torziós inga lengésidejéből határozzuk meg. A mérési mintáim az A5-ös hasáb rúd, és a V3 hengeres rúd volt.

## Minták méretei:

A méreteket csavarmikrométerrel mértem. A „d” a V3 minta átmérője, „a” és „b” az A5 oldalai.

	d (mm)	a (mm)	b (mm)
	10.02	8.08	12.45
	10.01	8.09	12.41
	10.01	8.05	12.44
átlagérték	10.0133	8.0733	12.4333

## Young-Modulus mérése

Mérés elvégzéséhez szükséges kiszámolni a minták hajlítási nyomatékát a lement adatokból.

„a” alapú A5-ös minta hajlítási nyomatéka:

$$I_a = \frac{a \cdot b^3}{12} = 1293.09 \text{ mm}^4$$

„b” alapú A5-ös minta hajlítási nyomatéka:

$$I_b = \frac{a^3 \cdot b}{12} = 545.20 \text{ mm}^4$$

V3 minta hajlítási nyomatéka:

$$I_{k\ddot{o}r} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^4 = 493.49 \text{ mm}^4$$

A rudak behajlását  $l = 380 \text{ mm}$  hosszú támasztó távolsággal mértem.

A5-ös rúd behajlási adatai:

	„a” alapú mérés	„b” alapú mérés
m (kg)	s (mm)	s (mm)
0.50	0.55	0.60
0.75	0.59	0.68
1.00	0.63	0.75
1.25	0.67	0.83
2.00	0.79	1.07
2.50	0.86	1.24
2.75	0.90	1.32
3.00	0.94	1.40
3.25	0.98	1.51
3.50	1.02	1.58
4.00	1.09	1.73

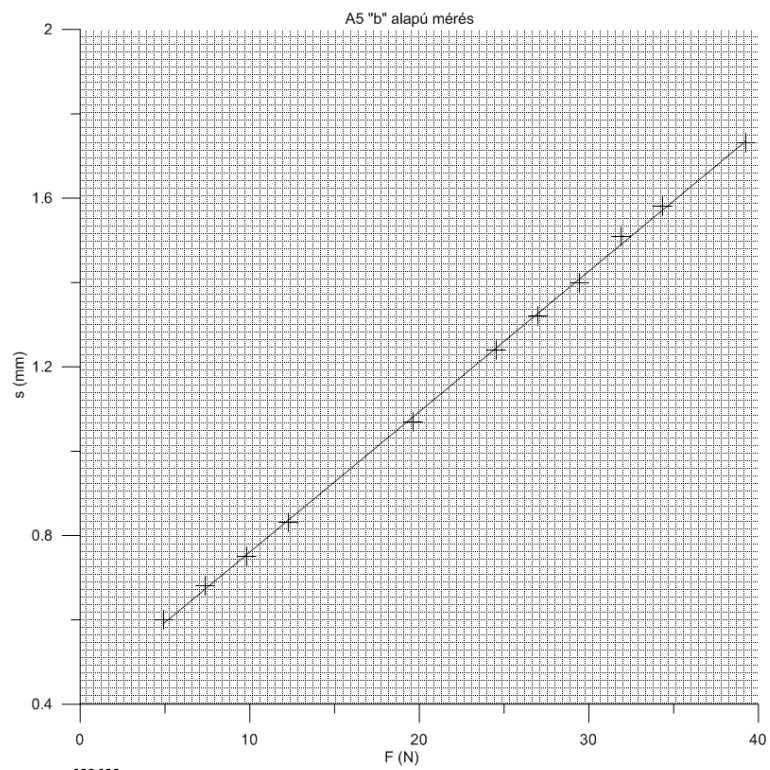
V3-as rúd behajlási adatai:

m (kg)	s (mm)
0.50	0.85
0.75	0.90
1.00	0.94
1.25	0.99
2.00	1.13
2.50	1.22
2.75	1.27
3.00	1.31

Az adatokra illesztett egyenes meredekségéből ( $m$ ), a kiszámolt hajlítási nyomatékokból ( $I$ ), és az alátámasztás távolságából ( $l$ ) már számolható a Young-Modulus ( $E$ ).

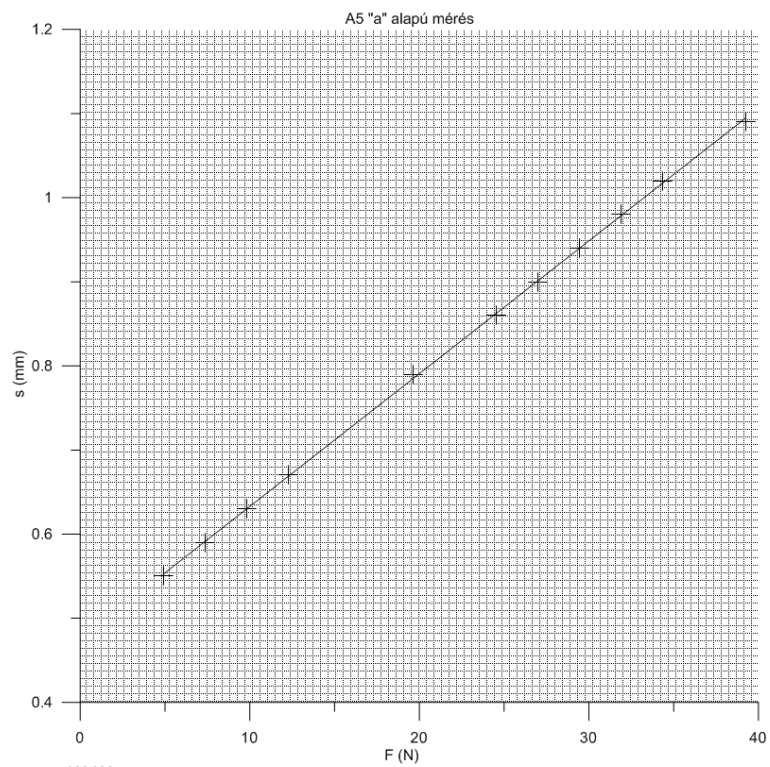
$$E = \frac{1}{48} \cdot \frac{l^3}{m \cdot I}$$

A5 „b” alapú minta grafikonja és illesztett egyenese:



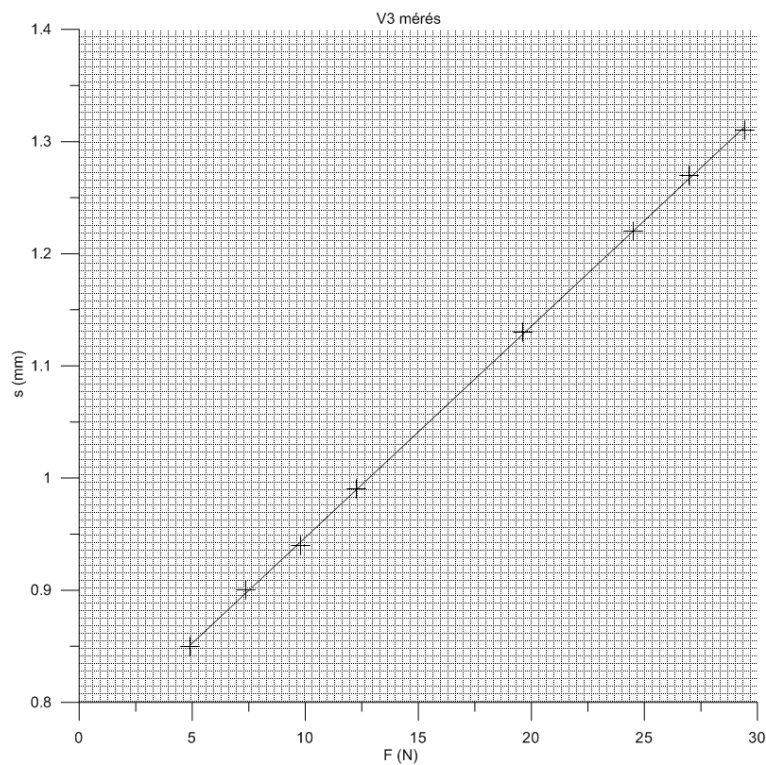
$$m_b = 0.03331326703 \frac{mm}{N}$$

A5 „a” alapú minta grafikonja és illesztett egyenese:



$$m_a = 0.01578655879 \frac{mm}{N}$$

V3 minta grafikonja és illesztett egyenese:



$$m_{k\ddot{o}r} = 0.01884190562 \frac{mm}{N}$$

**A minták Young-Modulusa:**

$$E_a = 5.63 \cdot 10^{10} Pa$$

$$E_b = 6.29 \cdot 10^{10} Pa$$

$$E_{k\ddot{o}r} = 1.229 \cdot 10^{10} Pa$$

**A Young-Modulus hibája a jegyzet alapján számolható:**

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l}{l} + 3 \frac{\Delta l}{l}$$

Az adatok eltérése a valóditól azzal magyarázható, hogy a minták nem tökéletes tisztaságúak, és a szennyezés, amit tartalmaznak az sem egyenletesen oszlik el bennük.

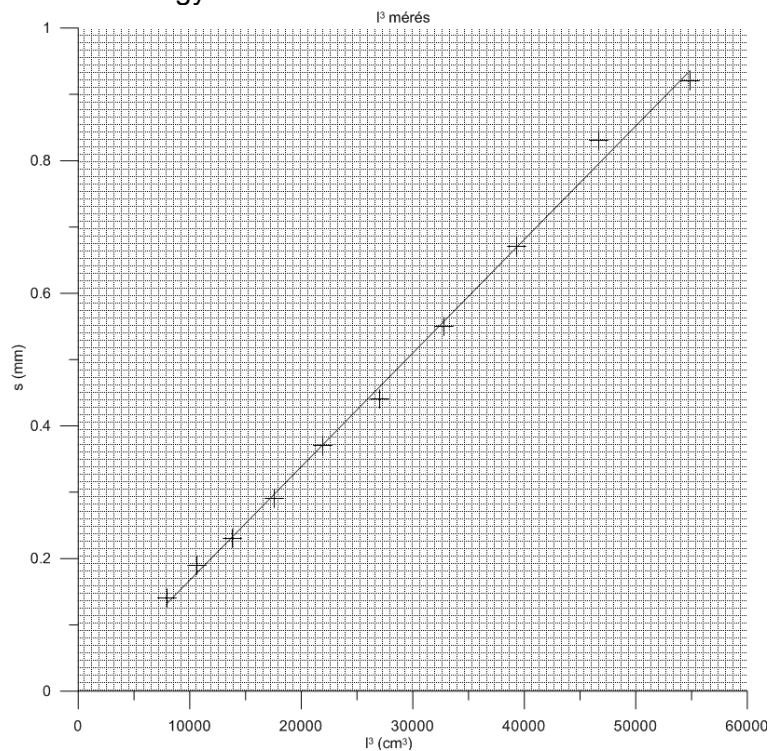
### Behajlás függése a rúd hosszától:

A mérés során a V3-as mintán azt vizsgálom, hogy a behajlás hogyan függ az alátámasztás távolságától ( $l$ ). Mérés közben szükséges egy alapterhelés, amivel megállapítható egy kezdeti behajlás ( $s_0$ ), majd ez után minden mérésnél adott terhelést használok, ami 5.5 kg.

Mérési adatok:

$l$ (cm)	$s_0$ (mm)	$s_t$ (mm)	$s$ (mm)
38	0.85	1.77	0.92
36	0.83	1.66	0.83
34	0.79	1.46	0.67
32	0.78	1.33	0.55
30	0.75	1.19	0.44
28	0.56	0.93	0.37
26	0.48	0.77	0.29
24	0.59	0.82	0.23
22	0.61	0.80	0.19
20	0.61	0.75	0,14

Mérés grafikonja és illesztett egyenese:



$$m = 0.000017129 \frac{mm}{cm^3}$$

A meredekség ismeretében a Young-Modulus megadható:

$$E = \frac{1}{48} \cdot \frac{F}{m \cdot I_{k\ddot{o}r}}$$

$$E = 1.32 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

## Torziómodulus mérése

Ebben a mérésben torziós ingával mérjük ki egy torziós szál torziómodulusát. A méréshez szükség van a huzal és az inga, valamint a súlyok adataira. Mérés során különböző távolságra ( $a$ ) helyezük a súlyokat az inga tengelyétől, és ez alatt a periódus időt ( $T$ ) mérjük műszer segítségével. Az így kapott adatpárookra egyenest illesztve kiszámolható a torziómodulus.

Méretetek:

torziós szálhossz ( $l$ )	594 mm
torziós szál átmérő ( $d$ )	0.51 mm

tárcsa száma	5.	8.
tárcsa tömege ( $m_1; m_2$ )	194.510 g	196.175 g
tárcsa átmérője ( $d_{t1}; d_{t2}$ )	45.1 mm	45 mm

Mérési adatok:

a (cm)	10T (s)
3	65.864
4	74.316
5	84.123
6	94.592
7	105.463
8	117.032
9	128.617
10	140.151

### Torziómodulus számítása:

A torziómodulus ( $G$ ) meghatározható az alábbi egyenletből, ahol a torziós szál geometriai adatait ( $K$ ), a lengésidőt ( $T$ ), és a tehetetlenségi nyomatékot ( $\theta$ ) ismerjük.

$$G = K \frac{\theta}{T^2}$$

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{d_{t1}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{d_{t2}}{2}\right)^2 + (m_1 + m_2) \cdot a^2$$

$$K = \frac{8\pi l}{(d/2)^4} = 3.5307 \cdot 10^{15} \frac{1}{m^3}$$

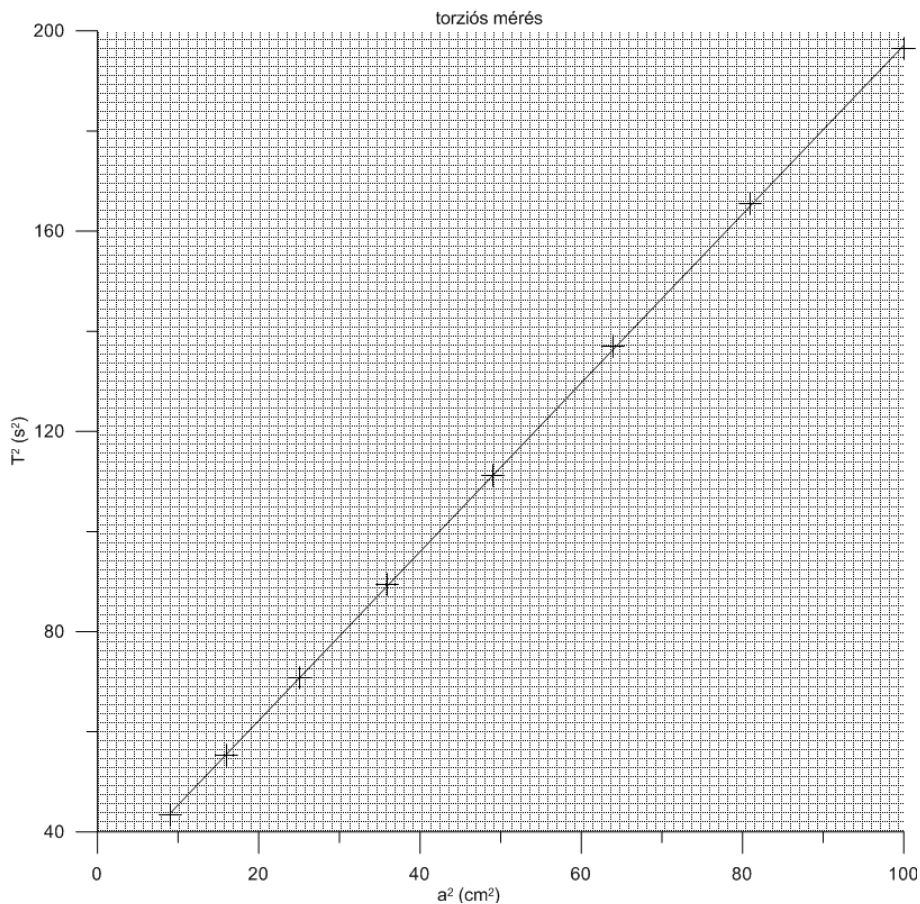
$$T^2 = \frac{K}{G} \left( \Theta_0 + \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{d_{t1}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{d_{t2}}{2}\right)^2 \right) + \frac{K(m_1 + m_2)}{G} \cdot a^2$$

A  $T^2$  és  $a^2$  adatpontokra illesztett egyenes paramétereiből a torzómodulus, és az üres inga tehetetlenségi nyomatéka megkapható.

$$G = K \frac{m_1 + m_2}{A}$$

$$\Theta_0 = \frac{GB}{K} - \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{d_{t1}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{d_{t2}}{2}\right)^2$$

Mérés grafikonja és illesztett egyenese:



$$A = 1.685873473 \frac{s^2}{cm^2} = 1685.873473 \frac{s^2}{m^2}$$

$$B = 28.53204608 s^2$$

$$R^2 = 0.999944 \text{ (Steiner-tétel igaz)}$$

**Eredmények:**

$$G = 8.1820 \cdot 10^{11} Pa$$

$$\Theta_0 = 6.5129 kg \cdot m^2$$